Concurrent Programming - Exercises 4

Ismorphism, Trace Equivalence and (Strong) Bisimulation

Consult Chap. 3-1-3,3 e 3.5 of [1].

1. Let

$$\begin{aligned} P &:= a!.0 + b!.0 \\ Q &:= b!.0 + a!.0 \end{aligned}$$

determine if the following relations hold

$$\begin{aligned} P &\sim_{tr} Q \\ a!.P &\sim_{tr} a!.Q \\ a!.P + a!.P &\sim_{tr} a!.Q + a!.Q \end{aligned}$$

and also for $\sim_{iso}$?

> **Solution:** Yes for both relations.

2. Show $(b!.0+c!.0) \sim_{iso} (c!.0+b!.0)$ but $a!.(b!.0+c!0)+a!.(b!.0+c!0) \not\sim_{iso} a!.(b!.0+c!0)+a!.(c!.0+b!.0)$ and conclude that $\sim_{iso}$ is not a congruence.

3. Show that for every $P, Q, R \in CCS$

$$\begin{aligned} P + Q &\sim_{tr} Q + P \\ (P + Q) + R &\sim_{tr} P + (Q + R) \\ P + 0 &\sim_{tr} P, \end{aligned}$$

and $\alpha.(P + Q) \sim_{tr} \alpha.P + \alpha.Q$.

4. Let

$$\begin{aligned} CTM &:= coin?.(coffee!.CTM + tea!.CTM) \\ CTM' &:= coin?.coffee!.CTM' + coin?.tea!.CTM' \end{aligned}$$

Show that $CTM \sim_{tr} CTM'$.

5. Solve bisimulation problems in `http://tinyurl.com/pseuco`

6. Solve (strong) bisimulation problems in PseuCo Book `https://book.pseuco.com/#/read/equality/workout`

7. Show that

   (a) $\sim$ is an equivalence relation.

Solution: Para mostrar que é reflexiva basta mostrar que a identidade $Id = \{(P, P) \mid P \in\}$ é uma bissimulação: Se $(P, P) \in Id$ e existe $\alpha \in Act$ tal que $P \xrightarrow{\alpha} P'$ então também $P \xrightarrow{\alpha} P'$ e $(P', P') \in Id$. Então $Id \subseteq \sim$, logo $\sim$ é reflexiva. Para a simetria, se $s_1 \sim s_2$ então existe uma bissimulação R tal que $(s_1, s_2) \in R$. Seja $R^{-1} = \{(s', s) \mid (s, s') \in R\}$. Então $(s_2, s_1) \in R^{-1}$ e R^{-1} é uma bissimulação: se $s_2 \xrightarrow{\alpha} s'_2$ sei que existe $s_1 \xrightarrow{\alpha} s'_1$ com $(s'_1, s'_2) \in R$, logo $(s'_2, s'_1) \in R^{-1}$. O mesmo se $s_1 \xrightarrow{\alpha} s'_1$. Para a transitividade seja $s_1 \sim s_2$ e $s_2 \sim s_3$. Temos que mostrar que $s_2 \sim s_3$ Sabemos que existem duas bissimulações R e R' tal que $(s_1, s_2) \in R$ e $(s_2, s_3) \in R'$. Seja

$$S = \{(s'_1, s'_3) \mid (s'_1, s'_2) \in R \wedge (s'_2, s'_3) \in R'\}.$$

Temos que $(s_1, s_3) \in S$ e S é uma bissimulação: se $(s, t) \in S$ então existe w tal que $(s, w) \in R$ e $(w, t) \in R'$. Seja $s \xrightarrow{\alpha} s'$, então existe $w \xrightarrow{\alpha} w'$ tal que $(s', w') \in R$ e $t \xrightarrow{\alpha} t'$, tal que $(w', t') \in R'$. Logo $(s', t') \in S$ como queriamos. O mesmo acontece se tivermos/começarmos com $t \xrightarrow{\alpha} t'$.

(b) $\sim$ is the largest bisimulation.

Solution: Por definição $\sim$ é a reunião de todas as bissimulações. Temos de mostrar que essa reunião é uma bissimulação. Pela simetria basta mostrar uma das condições. Seja $(s, t) \in \bigcup\{R \mid R \text{ bissimulação}\}$ e $s \xrightarrow{\alpha} s'$. Então existe uma bissimulação R_1 tal que $(s, t) \in R_1$ e um t' tal que $t \xrightarrow{\alpha} t'$ e $(s', t') \in R_1 \subseteq \bigcup\{R \mid R \text{ bissimulação}\}$. Logo $\{R \mid R \text{ bissimulação}\}$ é uma bissimulação.

(c) $s \sim t$ iff for each $\alpha \in Act$

- If $s \xrightarrow{\alpha} s'$ then t' such that $t \xrightarrow{\alpha} t'$ e $s' \sim t'$
- If $t \xrightarrow{\alpha} t'$ then s' such that $s \xrightarrow{\alpha} s'$ and $s' \sim t'$.

8. Let $TS = (S, Act, \longrightarrow)$ such that $S = \{s_i \mid i \geq 1\} \cup \{t\}$, $Act = \{a\}$ e $\xrightarrow{a} = \{(s_i, s_{i+1} \mid i \geq 1\} \cup \{(t, t)\}$.

   Show that $s_1 \sim t$ proving that $R = \{(s_i, t) \mid i \geq 1\}$ is a bisimulation.

9. Let P and Q be defined by

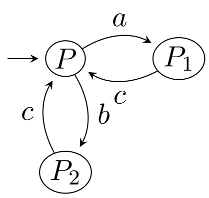
$$\begin{aligned} P &:= a.P_1 + b.P_2 \\ P_1 &:= c.P \\ P_2 &:= c.P \end{aligned}$$

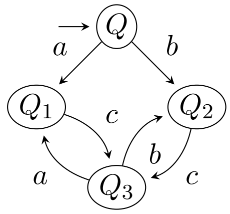
and

$$\begin{aligned} Q &:= a.Q_1 + b.Q_2 \\ Q_1 &:= c.Q_3 \\ Q_2 &:= c.Q_3 \\ Q_3 &:= a.Q_1 + b.Q_2 \end{aligned}$$

Show that $P \sim Q$ presenting a bisimulation that contains (P, Q). Draw their LTSs and test in pseuCo.com.

Solution: Temos os seguintes LTSs para P e Q, respectivamente.





Para que $P \sim Q$ tem de existir uma bissimulação (forte) R que contenha o par (P, Q) A seguinte tabela mostra a construção duma bissimulação R. Para cada par apenas é necessário considerar as ações do primeiro elemento do par dado os LTSs serem determinísticos. As marcas (x) indicam que chegamos a um par que já está em R (na primeira coluna).

R	Acções
(P, Q)	$P \xrightarrow{a} P_1$ e $Q \xrightarrow{a} Q_1$
	$P \xrightarrow{b} P_2$ e $Q \xrightarrow{b} Q_2$
(P_1, Q_1)	$P_1 \xrightarrow{c} P$ e $Q_1 \xrightarrow{c} Q_2$
(P_2, Q_2)	$P_2 \xrightarrow{c} P$ e $Q_2 \xrightarrow{c} Q_3$
(P, Q_2)	$P \xrightarrow{a} P_1$ e $Q \xrightarrow{a} Q_1$ (x)
	$P \xrightarrow{b} P_2$ e $Q \xrightarrow{b} Q_2$ (x)
(P, Q_3)	$P \xrightarrow{a} P_1$ e $_3 \xrightarrow{a} Q_1$ (x)
	$P \xrightarrow{b} P_2$ e $Q_3 \xrightarrow{a} Q_2$ (x)

Temos que a bissimulação $R = \{P, Q), (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P, Q_2), (P, Q_3)\}$.

10. Let P and Q be defined by

$$\begin{array}{rcl} P & := & a.P_1 \\ P_1 & := & b.P + c.P \end{array}$$

and

$$\begin{array}{rcl} Q & := & a.Q_1 \\ Q_1 & := & b.Q_2 + c.Q \\ Q_2 & := & a.Q_3 \\ Q_3 & := & b.Q + c.Q_2 \end{array}$$

Show that $P \sim Q$ presenting a bisimulation that contains (P, Q).

11. Show that if $P \sim Q$ and $\alpha \in Act$, $R \in CCS$ and $H \subseteq Com$, then

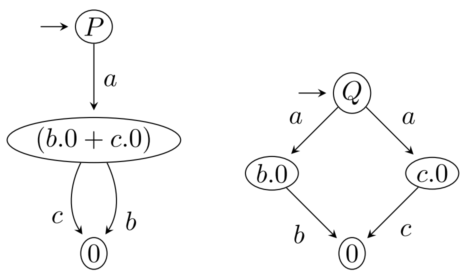
$$\begin{array}{rcl} \alpha.P & \sim & \alpha.Q \\ P + R & \sim & Q + R \\ R + P & \sim & R + Q \\ P|R & \sim & Q|R \\ R|P & \sim & R|Q \\ P\backslash H & \sim & Q\backslash H \end{array}$$

12. Let

$$P \;:=\; a.(b.0 + c.0)$$
$$Q \;:=\; a.b.0 + a.c.0$$

Show that P and Q are not strongly bisimilar.

Solution: Temos os seguintes LTSs



e os seguinte jogo de bissimulação forte enter um atacante (A), que quer mostrar que P e Q não são bissimilares e um defesa (D) que pretende mostrar que são (obtendo um bissimulação) (ver definição):

- A: $P \xrightarrow{a} (b.0 + c.0)$
- D: $Q \xrightarrow{a} b.0$
- A: $b.0 + c.0 \xrightarrow{c} 0$
- D não pode jogar, logo , perde e concluímos que $P \not\sim Q$.

13. Show that

$$P + Q \;\sim\; Q + P$$
$$P + 0 \;\sim\; P$$
$$(P + Q) + R \;\sim\; P + (Q + R)$$

Solution: Ver Teorema 7.5 das aulas téoricas. E também [1].

14. Show that for all $P, Q, R \in CCS$,

$$P|Q \;\sim\; Q|P$$
$$P|0 \;\sim\; P$$
$$(P|Q)|R \;\sim\; P|(Q|R)$$

Show that these are bisimulations

$$\begin{aligned}
&\{(P|Q, Q|P) \mid P, Q \in CCS\},\\
&\{(P|0, P) \mid P \in CCS\},\\
&\{((P|Q)|R, P|(Q|R)) \mid P, Q, R \in CCS\}.
\end{aligned}$$

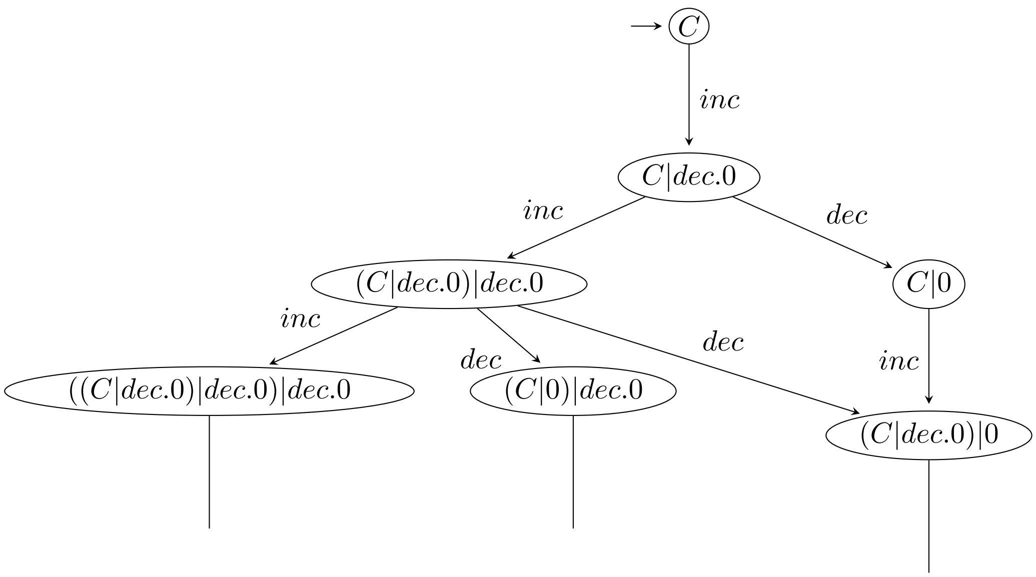
15. Let:

$$\begin{aligned}
C_0 &:= inc.C_1\\
C_n &:= inc.C_{n+1} + dec.C_{n-1}, \text{ para } n \geq 1
\end{aligned}$$

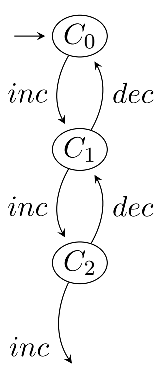
and $C := inc.(C|dec.0)$.

(a) Draw initial fragments of $[\![C]\!]_\Gamma$ and $[\![C_0]\!]_\Gamma$.

Solution: A initial fragment of $[\![C]\!]_\Gamma$:



A initial fragment of $[\![C_0]\!]_\Gamma$:



(b) Show that the following relation is a bisimulation.

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{R} & = & \{(C|\prod_{i=1}^{k} P_i, C_n) \mid k \geq 0 \wedge (P_i = 0 \vee P_i = dec.0) \\ & & \wedge \text{ the number of } \ i\text{s with } P_i = dec.0 \text{ is } n\}\end{array}$$

Consider $(C|\prod_{i=1}^{k} P_i, C_n) \in \mathcal{R}$.
Show that

1. if $C|\prod_{i=1}^{k} P_i \xrightarrow{\alpha} P$ exists Q such that $C_n \xrightarrow{\alpha} Q$ and $(P, Q) \in \mathcal{R}$.
2. if $C_n \xrightarrow{\alpha} Q$ exists P such that $C|\prod_{i=1}^{k} P_i \xrightarrow{\alpha} P$ and $(P, Q) \in \mathcal{R}$.

16. Consider a 1-Buffer.

$$B \quad := \quad put?.get?.B$$

For $n \geq 1$ we can consider a Buffer with capacity n, where B_i^n is a buffer with capacity n with $0 \leq i \leq n$ elements.

$$\begin{array}{rcl}B_0^n & := & put?.B_1^n \\ B_i^n & := & put?.B_{i+1}^n + get?.B_{i-1}^n, \quad 0 < i < n \\ B_n^n & := & get?.B_{n-1}^n\end{array}$$

(a) Verify that $B \sim_{iso} B_0^1$ (draw their LTSs).

(b) Verify that $B_0^2 \sim B_0^1 | B_0^1$ (draw their LTSs).

(c) Show that for $n \geq 1$,

$$B_0^n \sim \underbrace{B_0^1 | B_0^1 | \ldots | B_0^1}_{n}.$$

showing that the following relation is a bisimulation:

$$\mathcal{R} \quad = \quad \{(B_i^n, B_{i_1}^1 | B_{i_2}^1 | \ldots | B_{i_n}^1) \mid i_j \in \{0, 1\} \wedge \sum_{j=1}^{n} i_j = i\}$$

References

[1] L. Aceto, A. Ingólfsdóttir, K.G. Larsen, and J. Srba. *Reactive Systems: Modelling, Specification and Verification.* Cambridge University Press, 2007.